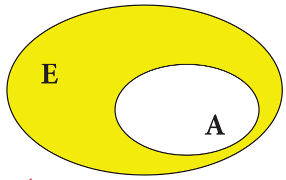
Proportions et évolutions

I. Proportions et pourcentages

Proportions

Soit E un ensemble ayant n_E éléments et A **une partie** de E ayant n_A éléments.

La **proportion** (ou **fréquence**) des éléments de la partie A par rapport à l'ensemble E est le quotient $p = \frac{n_A}{n_E}$.



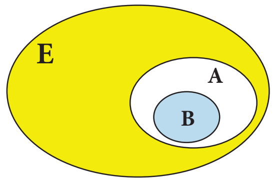
Le nombre p peut s'écrire sous une forme **fractionnaire**, **décimale** ou en **pourcentage**.

Appliquer une proportion

Appliquer une proportion p à une quantité, revient à multiplier ce nombre par p.

Proportions de proportions

Si p est la proportion de la partie A par rapport à l'ensemble E et si p' est la proportion de la partie B par rapport à la partie A alors la **proportion de la partie B par rapport à l'ensemble E** est le produit $p \times p'$.



II. Évolution d'une grandeur

Taux d'évolution

Soit V_I la valeur initiale d'une grandeur et V_F sa valeur finale suite à une évolution.

La variation absolue d'une grandeur est la différence $\Delta V = V_F - V_I$.

Le taux d'évolution (la variation relative) d'une grandeur est $t = \frac{V_F - V_I}{V_I} = \frac{\Delta V}{V_I}$.

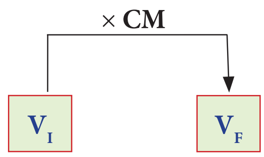
Si le taux t est négatif, alors il s'agit d'une baisse.

Si le taux t est positif, alors il s'agit d'une hausse.

Appliquer un taux d'évolution - coefficient multiplicateur

Appliquer un taux d'évolution t à une quantité, revient à multiplier cette quantité par $\mathrm{CM} = 1 + t$.

Le **coefficient multiplicateur** d'une évolution est le nombre $\mathrm{CM} = \frac{V_F}{V_I}$.

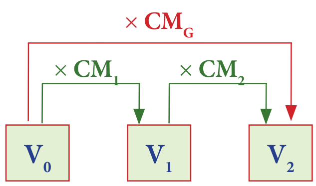


III. Évolutions successives

Taux d'évolution globale

Le **coefficient multiplicateur global** est le produit $\mathrm{CM}_G = \mathrm{CM}_1 \times \mathrm{CM}_2$.

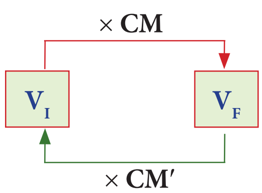
Le **taux d'évolution global** est $t_G = \mathrm{CM}_G - 1$.



Taux d'évolution réciproque

Le **coefficient multiplicateur réciproque** d'une évolution est $\frac{1}{\mathrm{CM}}$.

Le **taux d'évolution réciproque** est $t' = \frac{1}{1+t} - 1$.



Statistiques

I. Variance

À partir d'une liste de données (x_i) de moyenne $\overline{x}$

$$V=\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_N-\overline{x})^2}{N}=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_N^2}{N}-\overline{x}^2.$$

À partir d'un tableau d'effectif

Valeur (x_i)	x_1	x_2	…	x_p	**Total**
Effectif (n_i)	n_1	n_2	…	n_p	N

$$V=\frac{n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+n_p(x_p-\overline{x})^2}{N}=\frac{n_1x_1^2+n_2x_2^2+\ldots+n_px_p^2}{N}-\overline{x}^2.$$

À partir d'un tableau de fréquence

Valeur (x_i)	x_1	x_2	…	x_p	**Total**
Fréquence (f_i)	f_1	f_2	…	f_p	1

$$V=f_1(x_1-\overline{x})^2+f_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+f_p(x_p-\overline{x})^2=\left[f_1x_1^2+f_2x_2^2+\ldots+f_px_p^2\right]-\overline{x}^2.$$

II. Écart-type

L' écart-type d'une série statistique est noté σ.

L' écart-type est égal à la racine carrée de la variance : $\sigma=\sqrt{V}$.

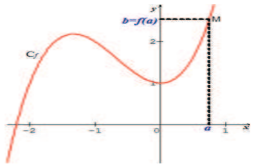
III. Comparaison de deux séries statistiques

Pour comparer deux séries statistiques, on utilise :

- **Des indicateurs numériques** : le couple (médiane, écart interquartile) ou le couple (moyenne, écart-type).
- **Des indicateurs graphiques** : diagramme en bâton, diagramme en boîte ou histogramme.

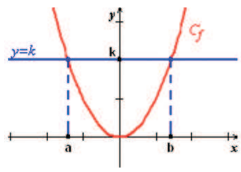
Fonctions

I. Déterminer l'image d'un nombre par une fonction



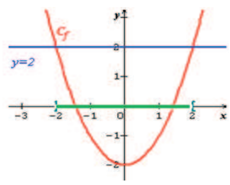
On détermine la valeur de la seconde grandeur correspondant à une valeur donnée de la première.

II. Déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction



On détermine la (ou les) valeur(s) de la première grandeur correspondant à une valeur donnée de la seconde.

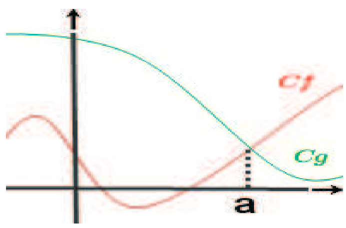
III. Résoudre une inéquation



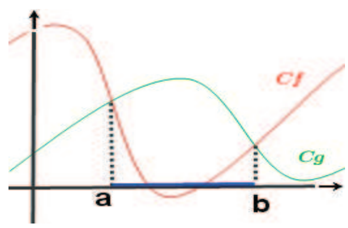
Il s'agit de déterminer les valeurs de la première grandeur correspondant à celles de la seconde qui sont inférieures ou égales à une valeur k donnée.

IV. Déterminer l'image d'un nombre par une fonction

Les solutions graphiques d'une équation ou d'une inéquation se lisent toujours sur l'axe des abscisses.



Le nombre a est la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.



L'intervalle [a ; b] est la solution de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

V. Sens de variation

Décrire l'évolution des valeurs de la seconde grandeur lorsque les valeurs de la première augmentent.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I :

- La fonction f est **croissante** si pour tous x_1 et x_2 de I, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- La fonction f est **décroissante** si pour tous x_1 et x_2 de I, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- La fonction f est **constante** si pour tous x_1 et x_2 de I, $f(x_1) = f(x_2)$.

VI. Optimisation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I :

- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I s'il existe un réel $a \in$ I tel que, pour tout $x \in$ I, $f(x) \leq f(a)$.
- $f(a)$ est le **minimum** de f sur I s'il existe un réel $a \in$ I tel que, pour tout $x \in$ I, $f(x) \geq f(a)$.

Perspectives parallèles

I. Perspective parallèle

Perspective parallèle

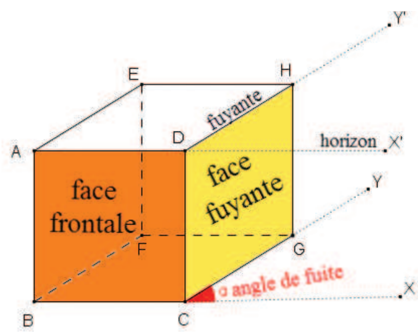
Dans une **perspective parallèle**, les droites qui sont parallèles dans l'espace restent parallèles entre elles dans la représentation plane.

Perspective cavalière

La **perspective cavalière** est une perspective parallèle dans laquelle le plan de projection est un plan frontal.

Vocabulaire

- **Face frontale** : face parallèle au plan de frontal. Elle est représentée en vraie grandeur.
- **Fuyante** : droite de l'espace perpendiculaire au plan de la représentation. Sa longueur est multipliée par le coefficient de fuite.
- **Face de fuite** : face latérale ou supérieure. Elle est orthogonale aux faces frontales.
- **Angle de fuite** : angle formé par l'inclinaison d'une fuyante par rapport à un plan frontal.
- **Coefficient de fuite** : rapport d'une longueur fuyante par la longueur réelle correspondante.
- **Point de vue** : position de l'observateur.



Projection orthogonale

Une **projection orthogonale** des faces permet de représenter un objet selon des vues qui sont perpendiculaires entre elles.

Perspective axonométrique

En **perspective axonométrique** aucune des faces de l'objet ne se trouve dans le même plan que le plan de la représentation.

II. Sections simples d'un solide

Sections simples d'un solide

Une **section plane d'un solide** est l'intersection de ce solide et d'un plan. Pour déterminer cette intersection, on représente les segments communs au plan et au solide.
Une section peut-être parallèle à une ou plusieurs faces du solide ou bien à aucune. Elle peut avoir la forme d'un triangle, d'un quadrilatère… .

Patron d'un solide

Un **patron de solide** est une figure plane dont, le pliage mettant bord à bord les arêtes se confondant, permet d'obtenir le solide.

Variables aléatoires

I. Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** est une expérience dépendant du **hasard**.

On peut donner l'ensemble de tous les résultats possibles appelés « **issues** » d'une expérience aléatoire.

II. Variables aléatoires

Variable aléatoire

Soit une expérience aléatoire dont l'univers des issues possibles est $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; \ldots ; e_n\}$.

On considère une fonction X qui à chaque issue e_i associe un nombre réel x_k. On dit qu'on définit ainsi une **variable aléatoire** X : $\Omega \to \mathbf{R}$.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète, prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Lorsqu'a chaque valeur x_k, on associe la probabilité p_k de l'événement $(X = x_k)$ de telle manière que : $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, on dit que l'**on définit la loi de probabilité de la variable aléatoire X**.

On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_k	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_k)$	p_1	p_2	...	p_n

Espérance d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités respectifs $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

L'**espérance mathématique d'une variable aléatoire X** le nombre réel, noté **E(X),** défini par :

$$E(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i .$$

Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités respectifs $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

La **variance** de la variable aléatoire X est le réel **V(X)** définie par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i \quad \text{ou} \quad V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{\,2} - E(X)^2 .$$

L'**écart-type** de la variable aléatoire X est le réel **σ(X)** définie par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} .$$

Suites numériques

I. Généralités sur les suites

Notion de suite numérique

Une **suite numérique** est une fonction, notée u ou (u_n), de **N** dans **R**, définie à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbf{N}$, par $n \to u(n)$.

Forme explicite et récurrente d'une suite

Une suite numérique (u_n) donnée peut s'exprimé soit sous **forme explicite** du type $u_n = f(n)$, soit sous **forme récurrente** du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Termes d'une suite

Pour une suite numérique (u_n) de forme explicite, les termes se calculent directement en remplaçant n par la valeur de l'indice du terme cherché $u_0 = f(0)$, $u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2)$ ... .

Pour une suite numérique (u_n) de forme récurrente, chaque terme se calcul à partir du terme précédent, et il est nécessaire de connaître u_0, alors $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$ ... .

Variations d'une suite numérique

Une suite numérique (u_n) est dite :

- **Croissante** à partir de l'indice p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- **Décroissante** à partir de l'indice p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- **Constante** à partir de l'indice p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} = u_n$.

II. Suites arithmétiques

Soit (u_n) une **suite arithmétique de raison r** et de premier terme u_0.

- **Formule récurrente** : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
- **Formule explicite** : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

Si $r > 0$, la **suite arithmétique** est **croissante**.

Si $r < 0$, la **suite arithmétique** est **décroissante**.

III. Suites géométriques

Soit (u_n) une **suite géométrique de raison q** et de premier terme u_0 :

- **Formule récurrente** : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$.
- **Formule explicite** : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

Si $q > 1$, la **suite géométrique** est **croissante**.

Si $0 < q < 1$, la **suite géométrique** est **décroissante**.

Si $q = 1$, la **suite géométrique** est **constante**.

Arithmétiques

I. Système de numérotation

Numération égyptienne

La **numération égyptienne** est un système **additif** qui utilise des symboles comme :

1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨

Numération romaine

La **numération romaine** est un système **additif** qui n'utilise que 7 symboles comme :

Chiffre	I	V	X	L	C	D	M
Valeur	1	5	10	50	100	500	1 000

Numération avec les chiffres arabes

C'est un système de numération **positionnel**. Les **chiffres arabes** sont les dix chiffres actuels : (**1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9**, **0**).

- Les chiffres utilisés en Orient appelés **Hindi** sont : ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠.
- Les chiffres utilisés au Maghreb et en Andalousie appelés **Ghubâr** sont: **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9**, **0**.

Numération éthiopienne

La **numération éthiopienne** est un système de **position** composé à partir de 20 chiffres :

፩	፪	፫	፬	፭	፮	፯	፰	፱	፲	፳	፴	፵	፶	፷	፸	፹	፺	፻	፼
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	10000

III. Base d'un système de numérotation

Numération décimale

- Le système **décimal** est le système utilisé actuellement. Il est composé des chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Il est appelé « **base 10** ».

Numération binaire

- Le système **binaire** est utilisé en informatique. Il est composé de 2 chiffres : 0 et 1. Il se nomme également « **base 2** ».